Forblad

Pladetrapper

K.W. Johansen

Tidsskrifter

BSM 11-3 Bygningsstatiske Meddelelser

1940

PLADETRAPPER

AF *K. W. JOHANSEN*

Ved rumlige Konstruktioner, der er sammensat af plane Dele, vil disse i Almindelighed være paavirkede baade som Skiver og som Plader. Ved de her betragtede Konstruktioner vil Pladepaavirkningen være den alt overvejende, hvorved Beregningen kan simplificeres betydeligt. Naar Skivepaavirkningen er forsvindende, vil Formforandringerne i Retninger, der ligger i Skivens egen Plan, være ubetydelige, medens Formforandringerne vinkelret paa Planen er betydelige, dels fordi Paavirkningerne i sig selv er de overvejende og dels fordi de skyldes Momenterne i Pladen, altsaa er Nedbøjninger, der i Almindelighed er af en helt anden Størrelsesorden end Skivens Strækninger eller Forkortelser.

Betragtes nu Kanten mellem Planerne 1 og 2, og har Planen 1 Nedbøjningen y og Strækningen x, maa Nedbøjningen n og Strækning t for 2 have de i Fig. 1 viste Størrelser. Eventuelle Drejninger og Forskydninger kan regnes bortelimineret, idet Planerne 1 og 2 er bragt i Forbindelse med hinanden i to af Kantens Punkter.

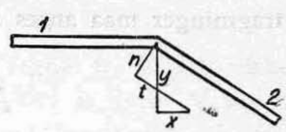

Fig. 1.

Naar x og t er Nul, maa ogsaa y og n være Nul, d. v. s. Pladerne har ingen Nedbøjninger langs Kanterne. Dette betyder igen, at Pladerne skal regnes understøttede langs Kanterne, hvorved Pladeberegningen bliver ganske uafhængig af Skiveberegningen. Man begynder derfor med

1. *Pladeberegningen.*

Kræfterne opløses i Komposanter i Planen og vinkelret paa denne. Pladen regnes foruden de ydre Understøtninger ogsaa støttet langs Kanterne ved de tilstødende Plader og bliver derfor kontinuerlig ved disse. Beregningen kan ske efter Elasticitetsteorien eller Brudlinieteorien. Den sidste lader sig meget vel anvende her, da Skivepaavirkningen er ubetydelig i Forhold til Pladepaavirkningen.

2. *Skiveberegningen.*

Ved Pladeberegningen findes Reaktionerne A_1 og A_2 fra Pladerne 1 og 2. Disse opløses i Skivekomposanterne N_1 og N_2. Projektion paa henholdsvis A_2 og A_1 giver

$$N_1 \sin \nu = A_1 \cos \nu + A_2 \quad \text{og} \quad N_2 \sin \nu = A_2 \cos \nu + A_1.$$

Hvis Belastningen paa den skraa Plade 2 er lodret, svarer A_2 til den Komposant af Belastningen, der er normal paa Pladen. Den i Pladens Plan liggende Komposant af Belastningen skal ogsaa fordeles paa en eller anden Maade, og det falder her naturligt at fordele den som A_2, hvorved Resultanten af A_2 og B_2 bliver lodret, og sammen med A_1 ialt giver den lodrette Kraft A. Derved faas specielt for Skivekræfterne

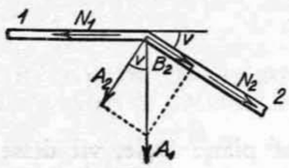

Fig. 2.

$$N_r = A \cot \nu \quad \text{og} \quad N_l = \frac{A}{\sin \nu}.$$

$N_1 = N_r$ angiver, at dette gælder for Reposer, og $N_2 = N_l$, at dette gælder Løb.

Paa denne Maade bestemmes Skivekræfterne for den enkelte Skive, og det er nu en Forudsætning for hele Beregningen, at Skiven kan overføre disse til de understøttende Mure alene. Mellem Skiverne indbyrdes kan der tillige være Forskydningskræfter i Kantens Retning. Paa Grund af Skivepaavirkningernes ringe Betydning vil en nøjagtig Beregning af Spændingsfordelingen være urimelig, saa de i det følgende anvendte simple Betragtninger maa anses for tilstrækkelige.

A. *Enkelt toløbet Trappe.*

1. *Pladeberegning.*

Løbet er simpelt understøttet i Muren og delvis indspændt i Reposerne. Reposerne er simpelt understøttede paa tre Sider, delvis indspændt paa den fjerde Side (Fig. 3a). Hvis Forholdene er som i Fig. 3b med et gennemgaaende Vindue i den ene Side, bliver R_2 simpelt understøttet paa to modstaaende Sider, henholdsvis fri og delvis indspændt ved de andre.

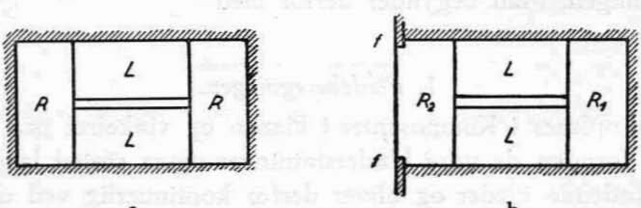

Fig. 3.

Første og sidste Repose støttes kun ved eet Løb, saa den fjerde Side bliver kun delvis indspændt paa den ene Halvdel og fri paa den anden Halvdel.

2. *Skiveberegning.*

I Fig. 4 er Reaktionen A fra R og L paa Kanten mellem disse efter Formlen Side 14 opløst i Skivekræfterne N_r og N_l. Tilsvarende er gjort

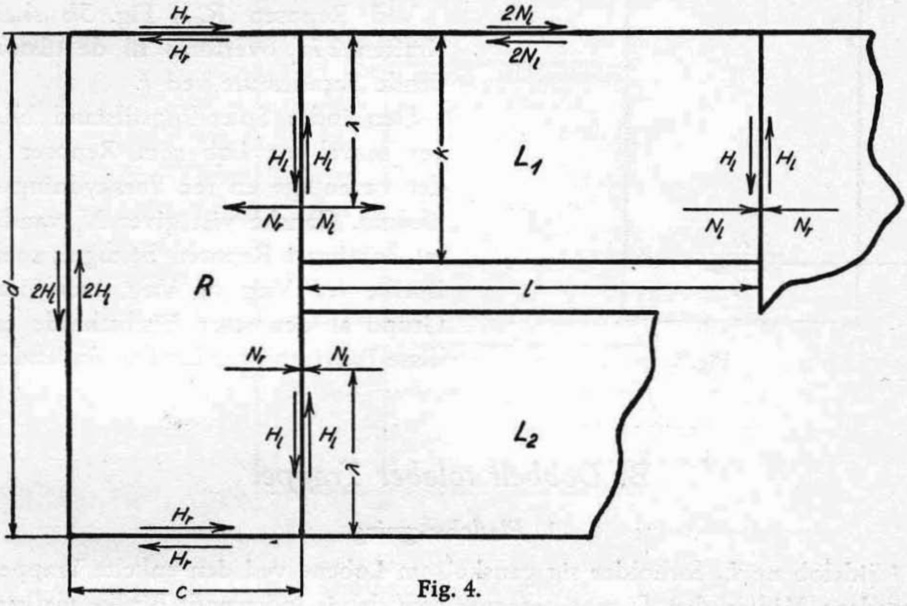

Fig. 4.

ved de øvrige Kanter. Løbet L_1 fører ned, L_2 op, regnet fra R. Ialt virker der $2\,N_l$ paa L_1. Disse skal optages ved Muren. Ved at flytte N_l ind til Muren opstaar Momentet $2\,N_l\lambda$, der ophæves ved Forskydningskraften H_l mellem L_1 og R, hvor

$$H_l = \frac{2\,N_l \cdot \lambda}{l},$$

l er regnet langs Løbet. Dermed er den ydre Ligevægt for Løbet bragt i Orden.

Reposen paavirkes foruden af N_r ogsaa af H_l lig og modsat Løbets. Endemuren skal da optage de $2\,H_l$. Ved Væggen kommer endvidere H_r, der bestemmes ved Moment om lodret Akse, som giver

$$H_r = \frac{2\,H_l \cdot c - N_r(d - 2\,\lambda)}{d},$$

hvormed den ydre Ligevægt for Reposen er bragt i Orden.

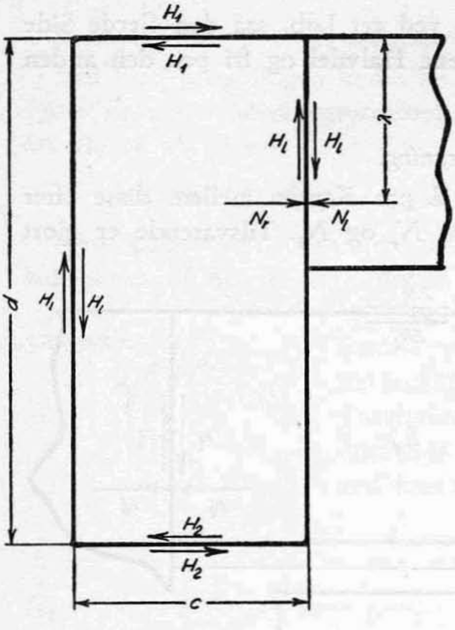

Fig. 5.

Ved Slutreposerne faas tilsvarende (Fig. 5)

$$H_2 = \frac{H_l \cdot c + N_r \cdot \lambda}{d};$$

$$H_1 = N_r - H_2.$$

Ved Reposen R_2 i Fig. 3b skal Kraften $2\,H_l$ overføres til de tilstø≈dende Façademure ved *f*.

Den indre Spændingstilstand bli≈ver saavel for Løb som Reposer i det væsentlige en ren Forskydnings≈tilstand. Ganske vist giver N_r vand≈ret Bøjning i Reposen betragtet som Bjælke fra Væg til Væg, men paa Grund af den store Bjælkehøjde er disse Paavirkninger her forsvindende.

B. *Dobbelt toløbet Trappe.*

1. *Pladeberegning.*

Sideløbene L_1 forholder sig ganske som Løbene ved den enkelte Trappe, medens Midterløbet L_2 maa beregnes som delvis indspændt Bjælke mellem Reposerne. Da L_2 ikke kan overføre Skivekræfter til ydre Understøtnin≈ger, kan Kanten *e-e* ikke regnes som Understøtning af Reposepladen. Denne er altsaa simpelt understøttet paa de tre Sider, af den fjerde er Strækningerne *d-e* delvis indspændte, *e-e* belastet af L_2, ikke understøttet, men alligevel afstivet af L_2. Havde nemlig *e-e* været fri, kunde der dan≈nes Brudfigurer med Brudlinier endende paa *e-e*, men dette er udelukket, naar L_2 støder til ved *e-e*. Derved opstaar der Skivekræfter mellem L_2 og *R*, som i hver Del for sig danner et Kraftsystem med Resultanten Nul. Der kan ogsaa her være Vindue ved *f-f*, ja endog hele Muren *d-f-f-d* kan undværes, idet *R* da er indspændt langs *d-e* i Løbene.

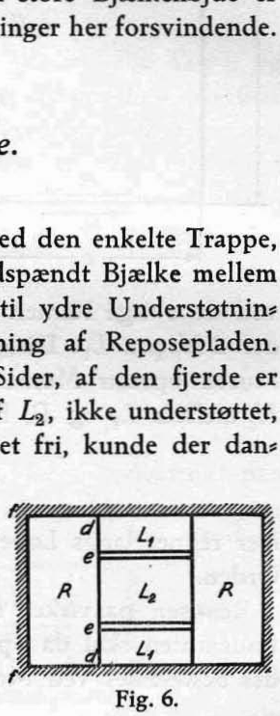

Fig. 6.

Slutreposen med Midterløb bliver simpelt under≈støttet paa tre Sider. Den fjerde er fri og ved *e-e* belastet, men ogsaa af≈stivet ved Løbet. Slutreposen med Sideløbene er simpelt understøttet paa tre Sider, den fjerde er delvis indspændt ved *d-e* og fri paa *e-e*.

2. *Skiveberegning.*

For Midterløbet er der ingen, og Sideløbene behandles som ved den enkelte Trappe under A. Da begge Sideløb enten fører op eller ned, bliver R's Paavirkninger som vist i Fig. 7 for Sideløb, som fører ned fra

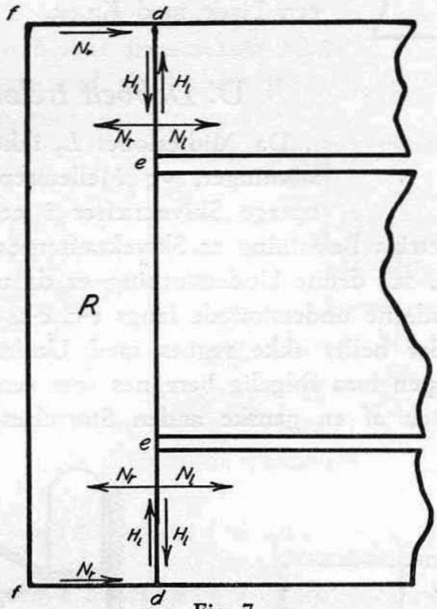

Fig. 7.

R. I modsat Fald skiftes samtlige Kraftretninger. Hvis Muren *f-d* mangler, maa N_r overføres ved *d*. R paavirkes væsentlig til vandret Bøjning, og saavel N_r som H_l giver Tryk ved *e-e*, hvis Sideløbene fører ned, ellers Træk.

Af Slutreposerne vil kun den med Sideløb faa Skivepaavirkning.

C. *Enkelt treløbet Trappe.*

Hvis der ved Pladeberegningen forudsættes, at Løbene og Hjørnereposerne R har Understøtning ved de fælles Kanter, giver Skiveberegningen for Hjørnereposerne de i Fig. 9 viste Paavirkninger, der ikke kan optages, da Momentligningen ikke kan tilfredsstilles. Det samme bliver Tilfældet, selvom der kun regnes med Understøtning ved den ene af Kanterne. Resultanten af Murenes Reaktioner H_r og H'_r maa nemlig altid gaa gennem Murhjørnet, medens Paavirkningerne fra Løbene ikke gør det.

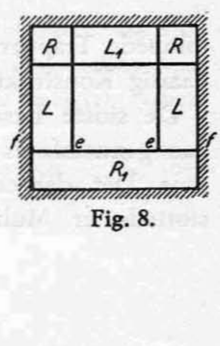

Fig. 8.

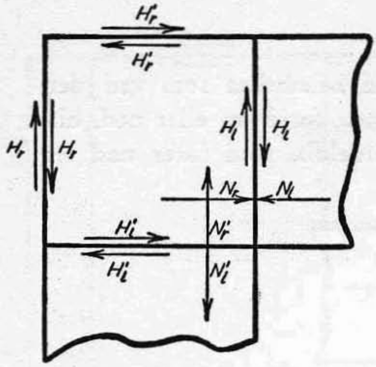

Fig. 9.

Heller ikke ved *e-f*, kan der regnes med Understøtning, da *R* ikke kan optage den fra *L* stammende Paavirkning H_l.

Der bliver derfor ingen Skivevirkninger i dette Tilfælde og Trappen skal beregnes som een Plade med Knæk.

D. *Dobbelt treløbet Trappe.*

Da Midterløbet L_2 ikke har ydre Understøtninger, og Mellemreposen R_1 kun kan optage Skivekræfter i een Retning, nemlig Murens (ved symmetrisk Belastning er Skivekræfternes Resultant i denne Retning endog Nul, saa denne Understøtning er da uden Virkning) kan man ikke regne Pladerne understøttede langs *e-c*, *c-c*. Af samme Grunde som ovenfor kan der heller ikke regnes med Understøtninger ved de øvrige Kanter. Trappen maa følgelig beregnes som een Plade med Knæk. Momenterne bliver da af en ganske anden Størrelsesorden end ved de

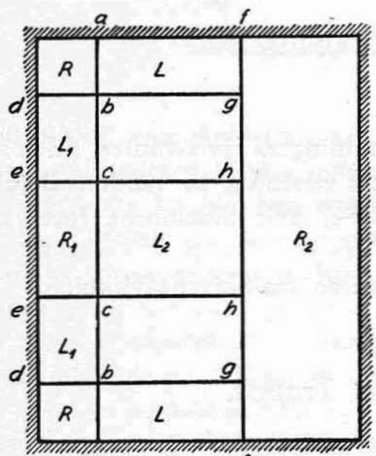

Fig. 10.

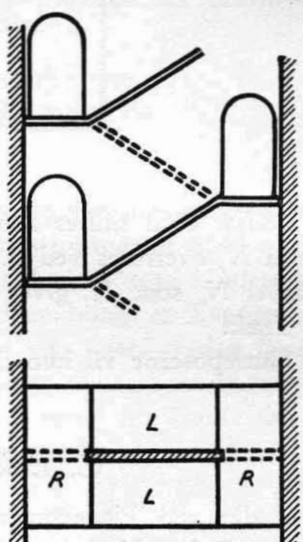

Fig. 11.

toløbede Trapper, saa de treløbede Trapper maa betegnes som en meget daarlig Konstruktion.

De sidste Eksempler viser Tilfælde, hvor den rumlige Virkning ikke kan gennemføres paa Grund af manglende Understøtning for Skivekræfterne. Det, der er bestemmende for, hvordan Pladerne kan regnes understøttede er Mulighederne for Skivekræfternes Overførelse til Murene.

Læseren kan nu selv undersøge den eenløbede Trappe i Fig. 11 samt de Varianter, der kan fremkomme ved de foregaaende i Tilfælde af Aabninger i Murene.

E. *Nogle Pladeformler.*

Det fremgaar af denne Gennemgang af de almindeligste Trappeformer, at de indeholder en Række interessante Pladeopgaver. Da disses Løsning ved Elasticitetsteorien med de forhaandenværende Midler maa betegnes som uigennemførlig, maa Brudliniemetoden anvendes. Da den fuldstændige Gennemgang af dette frugtbare Omraade indenfor Pladeteorien vil blive givet ved anden Lejlighed, skal her kun anføres Formler for det simpleste Tilfælde A.

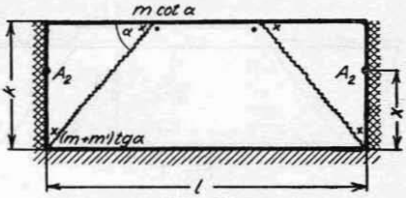

Fig. 12.

Her skal Løbet beregnes som Pladen i Fig. 12, der er delvis indspændt langs to modstaaende Sider, simpelt understøttet og fri paa de to andre. For den viste Brudfigur og med Indspændingsmomentet m' faas Momentligningen om Siderne k og l for de tilstødende Pladedele

$$(m+m')\,k = m\cot\alpha \cdot k\cot\alpha + \frac{1}{6}pk^3\cot^2\alpha$$

$$2\,m\cdot k\cot\alpha + 2\,m\cot\alpha\cdot k = \frac{1}{2}plk^2 - 2\,\frac{1}{3}\,pk^3\cdot\cot\alpha,$$

som giver

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}\,\frac{k}{l} + \sqrt{\frac{4}{9}\,\frac{k^2}{l^2} + \frac{m}{m+m'}} \quad \text{og} \quad m+m' = \frac{pkl}{8\operatorname{tg}\alpha} = \frac{P}{8\operatorname{tg}\alpha}.$$

Reaktionen A_2 findes ved Belastningen paa den trekantede Del og Knudekræfterne $m\cot\alpha$ og $(m+m')\operatorname{tg}\alpha = \frac{P}{8}$, til

$$A_2 = \frac{1}{2}pk^2\cot\alpha + \frac{P}{8}(1+\cot^2\alpha)$$

eller

$$A_2 = \frac{P}{8}\left[1 + 4\,\frac{k}{l}\cot\alpha + \cot^2\alpha\right].$$

Her betyder P Løbets totale Belastnings Komposant vinkelret paa Pladen. Efter det Side 14 vedtagne bliver den af A_2 og B_2 resulterende lodrette Reaktion givet ved samme Udtryk, naar blot P nu betyder Løbets totale lodrette Belastning.

Tages Momentet om l for hele Pladen, findes Beliggenheden af A_2, idet

$$2\,x A_2 = \frac{1}{2}Pk, \qquad x = \frac{P}{4A_2}k.$$

Behandlingen af Slutreposen fører til en anden interessant Del af Pladeteorien, Plader med afbrudte Understøtninger. Da det vilde føre for vidt at gaa nærmere ind paa Beregningen her, anføres kun Resultaterne for tre vigtige Tilfælde.

I. En lang Plade er indspændt i den ene Side, fri i den anden. Den er altsaa armeret i een Retning for det negative Moment $m' = \frac{1}{2} pa^2$. Er der nu en Aabning af Bredde b, er det ved ikke for store Aabninger muligt at undvære en Bjælke, idet Pladen selv bærer over Aabningen. Naar $b \leqq 1{,}7\,a$, skal Pladen blot krydsarmeres, og naar $b \leqq 2{,}4\,a$, skal den ogsaa krydsarmeres i Undersiden, svarende til $m = m' = \frac{1}{2} pa^2$.

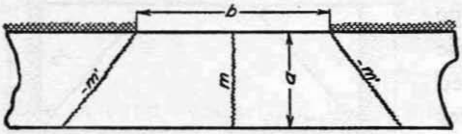

Fig. 13.

For større Værdier af b maa Pladen gøres tykkere. Ekstraarmeringen skal føres $a - \frac{6}{5} a$ forbi Aabningen.

II. En lang Plade er simpelt understøttet langs begge Kanter og normalt armeret i een Retning for det positive Moment $\frac{1}{8} pa^2$. Ved en Muraabning af Bredde b skal Pladen selv bære. For $b \leqq 1{,}3\,a$ skal den blot krydsarmeres og for $b \leqq 2\,a$ skal den ogsaa krydsarmeres i Oversiden for $m' = \frac{1}{8} pa^2$. Ved større Bredder b skal Pladen gøres tykkere. Ekstraarmeringen føres kun $\frac{1}{8} a$ forbi.

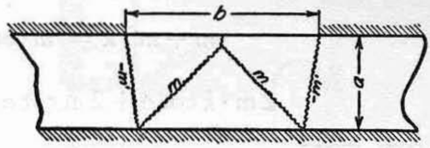

Fig. 14.

III. En rektangulær Plade med Sidernes Forhold ca : 2 har et positivt m omkring $pa^2 : 13{,}5$. Mangler nu Understøtningen paa Strækningen b, kan Pladen uden videre selv bære, naar $b \leqq a$ og naar den krydsarmeres ligesaa stærkt i Oversiden som i Undersiden, kan den selv bære, saa længe $b \leqq 1{,}2\,a$, hvilket i Reglen vil være opfyldt for de her behandlede Plader.

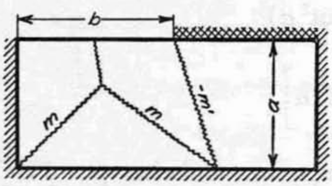

Fig. 15.

Slutreposerne beregnes da efter Normerne, som delvis indspændt i den ene Side, men kun med ca. Halvdelen af Løbets Indspændingsgrad, og simpelt understøttet paa de andre Sider, men krydsarmeres baade i Over- og Underside.

Reaktionen A_1 virker midt i Siden, altsaa nær Løbets Kant, saa første og sidste Løb afviger lidt fra de normale.

Til Slut behandles et Eksempel. (Se ogsaa Bygningsstat. Medd. Aarg. IX., S. 55).

Belastning: 1000 kg/m^2 og 800 kg/m^2 af Horisontalprojektionen for henholdsvis Løb og Repose.

$$\operatorname{tg} \nu = 0{,}72, \quad \cos \nu = 0{,}811, \quad \sin \nu = 0{,}585.$$

Løbets Bredde 1,0 m og Længde $2 : 0{,}811 = 2{,}47$ m. Belastning vinkelret paa Pladen $1000 \cdot 0{,}811^2 = 658$ kg/m^2. $P = 658 \cdot 1{,}0 \cdot 2{,}47 = 1625$ kg. Med Indspændingsgraden $\frac{m'}{m} = \frac{1}{3}$ faas $\operatorname{tg} \alpha = 1{,}18$.

$$m + m' = \frac{1}{8} 1625 : 1{,}18. \quad m = 129 \text{ kg}.$$

$A_2 = 630$ kg. Den tilsvarende lodrette $630 : 0{,}811 = 775$ kg.

$$x = 0{,}645 \text{ m}.$$

Repose $1{,}0 \cdot 2{,}2$ m. Beregnes efter Normerne. $m = 55$ kg.

$$A_1 = \frac{1}{8} 800 + \frac{1}{2} 800 \cdot 0{,}6 = 340 \text{ kg}.$$

$$A = 340 + 775 = 1115 \text{ kg}.$$

$$\lambda \cdot A = \frac{1}{8} \cdot 800 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} 800 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 + 775 \cdot 0{,}645 = 725 \text{ kgm}. \quad \lambda = 0{,}65 \text{ m}.$$

$$N_l = 1115 : 0{,}585 = 1900 \text{ kg}. \quad N_r = 1115 : 0{,}72 = 1550 \text{ kg}.$$
$$H_l = 1000 \text{ kg}. \quad H_r = 270 \text{ kg}.$$

Muren ved Løbet skal tage Forskydningen $2\, N_l : l = 1540$ kg/m. Ved Reposen faar Endevæggen $2\, H_l : d = 910$ kg/m, og de to Sidevægge faar $H_r : c = 270$ kg/m.

Ved Slutreposen faas i denne $m = 62$ kg efter Normerne, og den armeres altsaa i begge Sider herfor. Idet A_1 bliver dobbelt saa stor som før, faas

$$A = 775 + 2 \cdot 340 = 1455 \text{ kg}. \quad \lambda \cdot A = 680 \cdot 1{,}1 + 775 \cdot 0{,}645 = 1248 \text{ kgm}.$$
$$\lambda = 0{,}86 \text{ m}. \quad N_l = 2490 \text{ kg}. \quad N_r = 2020 \text{ kg}.$$

$$H_l = (1900 \cdot 0{,}65 + 2490 \cdot 0{,}86) : 2{,}47 = 1365 \text{ kg}.$$
$$H_1 = 610 \text{ kg} \quad H_2 = 1410 \text{ kg}.$$

Paa Grund af det større H_l faar ogsaa den nærmeste Repose lidt andre Skivekræfter. Saaledes faar Endevæggen $1000 + 1365 = 2365$ kg, og H_r bliver $(1365 - 1000) : 2{,}2 = 166$ kg større, altsaa 436 kg.

Muren ved Løbet skal tage Forskydningen $2 \cdot 2490 : 2{,}47 = 2020$ kg/m.
